Guía Didáctica de

MICROECONOMÍA III

(código: 43401; carácter: Troncal en Economía; Créditos: 4,5; Curso: 4º; Cuatrimestre: 1º)

PROFESORA DRA. DÑA. Mª JOSÉ LORENZO SEGOVIA

http://www.uned.es/dpto-analisis-economico1/fichprof/lorenzo/lorenzo.html

ÍNDICE DE ESTA GUÍA:

I. Introducción

II. Material didáctico

II.1. Bibliografía básica

II.2. Bibliografía complementaria

III. Programa de la asignatura

IV. Preparación de la asignatura

V. Tipo de examen y criterios de evaluación

VI. Servicio de consultas

VII. Comunicación de las calificaciones

I. INTRODUCCIÓN

Uno de los principales objetivos del programa de la asignatura **Microeconomía III**, correspondiente al segundo ciclo de la *licenciatura en Economía*, es ofrecer una visión más formalizada de una buena parte de los temas que ya se han estudiado en los cursos de Microeconomía I y II del primer ciclo. En este sentido, mientras que en los cursos del primer ciclo el análisis teórico se desarrolla en el espacio de dos únicos bienes, en el curso de Microeconomía III dicho análisis se generaliza a **n bienes**, lo cual, añade un grado de dificultad adicional al estudio, exigiendo que el alumno posea cierta agilidad en el manejo de los fundamentos de Análisis matemático y Álgebra lineal.

Los temas incluidos en el programa de **Microeconomía III** están dirigidos a la modelización del comportamiento de agentes individuales, consumidores y productores, que actúan paramétricamente respecto a los precios, en un marco institucional caracterizado por la competencia perfecta.

Más específicamente, el programa se estructura en once temas distribuidos en *dos grandes secciones*:

I) Teoría del comportamiento del consumidor y de la demanda

II) Teoría de la producción

Desde el punto de vista formal, ambos agentes serán tratados idénticamente, suponiendo que sus decisiones son el resultado de *un proceso de optimización condicionada* en el que cada uno tratará de maximizar una función objetivo sometido a determinadas restricciones; en consecuencia, las diferencias entre consumidores y productores radicarán en el tipo de función objetivo y las restricciones que deben afrontar en cada caso.

Dentro de cada sección, la caracterización del comportamiento de ambos agentes se inicia postulando una serie de axiomas que permitan garantizar la existencia de una función que represente formalmente sus objetivos para, posteriormente, formular explícitamente las correspondientes *restricciones*.

Una vez formuladas las *funciones objetivo* y las *restricciones*, el siguiente paso consistirá en plantear formalmente el problema de optimización condicionada cuya solución nos permite obtener las respectivas *funciones de demanda y oferta* que dependerán de una serie de variables (renta, precios...) dadas exógenamente.

Llegados a este punto, el análisis se centrará, por una parte, en el estudio de las condiciones suficientes que deben verificar tanto las *funciones objetivo* como sus correspondientes *conjuntos de elección* para que las soluciones al problema de optimización existan; para ello, en el programa se concede un interés especial al análisis del papel que desempeñan cada uno de los axiomas y supuestos sobre los que se construyen los modelos, y *las consecuencias que se derivan de su incumplimiento*.

Por otra parte, y dado que como se ha señalado las funciones relevantes de oferta y demanda dependen de una serie de variables dadas exógenamente, y ajenas al comportamiento de los agentes, la cuestión que surge de forma natural en el análisis es tratar de ver cómo responderán tales agentes a los cambios que se experimenten en dichas variables, esto es, el análisis de estática comparativa. Este análisis, además de permitirnos conocer cómo reaccionan los agentes ante variaciones exógenas de la renta y los precios de los bienes y/o los factores productivos, nos permitirá, asimismo, establecer relaciones de complementaridad o sustituibilidad entre los bienes, deducir la senda de expansión en el consumo y la producción, etc.

A continuación, y después de estudiar formalmente en cada sección los modelos básicos de comportamiento de los agentes, se pasan a examinar con detalle dos temas que resultan ser especialmente relevantes desde el punto de vista de la estimación y contrastación empírica de los modelos: la *dualidad* y la *agregación*.

Más concretamente, y dado que se considera que en este curso es imprescindible establecer una conexión clara entre el análisis teórico y el trabajo empírico, en el programa se han incorporado algunos temas especialmente recomendables para dicho fin y que, al mismo tiempo, sirven también para diferenciar los contenidos de esta asignatura de las de primer ciclo.

La adopción del *enfoque dual* en el análisis del comportamiento de consumidores y productores, el tratamiento de los *problemas de agregación* en el consumo, la deducción de distintas formas funcionales de sistemas completos de demanda y de funciones de oferta de bienes y de costes, así como el estudio de los supuestos implícitos existentes en relación a las funciones objetivo de los agentes, son algunos de los temas que se incluyen con el propósito mencionado.

Por último, en cada una de las dos secciones se ha incluido un *capítulo de ampliaciones* de los modelos básicos de comportamiento de consumidores y productores. Por lo que se refiere a los consumidores, se platea en primer lugar el problema de optimización condicionada en un contexto en el que el agente es capaz de influir sobre su propia renta decidiendo el número de horas que está dispuesto a trabajar a cambio de un salario; en segundo lugar, en el marco de un modelo intertemporal, se estudia la decisión del individuo entre consumo presente y futuro o, lo que es lo mismo, consumo-ahorro; por último, se examinan diferentes medidas de cambios en el bienestar de los consumidores ante situaciones alternativas. En el capítulo de ampliaciones de la teoría de la producción se estudian los efectos de la inclusión del cambio técnico en la función de producción y se modela el comportamiento de los productores que ofrecen más de un producto final, esto es, en condiciones denominadas de producción conjunta.

En el *programa de la asignatura*, que se recoge en la sección III de esta *guía*, se encuentran detallados los temas que configuran cada una de las dos secciones señaladas al principio de esta introducción, cuyos epígrafes, coinciden con los del libro de Segura (capítulos 2, 3 y 4).

Finalmente, no quisiera concluir esta introducción sin expresar mi agradecimiento a la persona que de forma anónima ha designado el Vicerrectorado para revisar la versión inicial de esta Guía, ya que sus sugerencias me han resultado de una gran utilidad para poder mejorarla, y corregir algunos errores y erratas existentes en la misma.

II. MATERIAL DIDÁCTICO

II.1. Bibliografía básica

En este curso se establece una distinción entre la *bibliografía obligatoria* y los manuales y/o artículos de *lectura recomendada* (señalados con **R** en el programa) para aquellos alumnos que estén interesados en profundizar más en los temas.

El *texto básico* sobre el que se ha elaborado el programa de la asignatura y con el que, en consecuencia, se han hecho coincidir sus epígrafes es:

- Segura, J. (1994): *Análisis Microeconómico*, Ed. Alianza Universidad Textos. 3ª ed., Madrid.

Las *lecturas recomendadas* se incluyen al final de cada uno de los temas junto con los capítulos correspondientes, en cada caso, de los textos obligatorios. Una relación precisa de estas lecturas se encuentra recogida al final del programa.

Por último, en esta guía se han incluido al final de cada sección una serie de *cuestiones y ejercicios* que tienen una doble finalidad. En primer lugar, sirven para que el alumno repase los conceptos básicos de los temas estudiados y pueda centrar su atención en los aspectos que revisten mayor interés; en segundo lugar, pueden servir para orientar al alumno del tipo de cuestiones y ejercicios a los que habrá de responder en las pruebas presenciales.

II.2. Bibliografía complementaria

a) Como textos para consulta o ampliación de algunos temas se sugieren los siguientes:

- Varian, H. (1992): *Análisis Microeconómico*. Ed. Antoni Bosch, 3ª ed., Barcelona. *Para casi todas las secciones*.
- Deaton, A. y Muellbauer, J.: *Economics and Consumer Behavior*, Cambridge University Press, 1980. *Para la Primera Sección*.
- Chambers, R.G.: *Applied Production Análisis*, Cambridge University Press, 1988. *Para la Segunda Sección.*

b) El alumno que necesite repasar los principales *conceptos matemáticos* puede hallar una síntesis útil en el apéndice del libro de Varian (1992), citado anteriormente, o en:

- Henderson, J.M. y Quandt, R.E. (1985): *Teoría Microeconómica*, 3ª edición, Editorial Ariel, Madrid.

c) Para el alumno que necesite un estudio más a fondo de los *problemas de convexidad y optimización* se recomienda acudir al texto:

- Madden, P. (1987): *Concavidad y optimización en Microeconomía*, Alianza Universidad, Madrid.

d) El alumno que precise *repasar los conceptos básicos* de Microeconomía a nivel intermedio debe trabajar con alguno de los siguientes textos:

- Calvo, J. y Lorenzo, M. J. (2002): *Microeconomía: Consumo y Producción*, CERA, Madrid.
- Varian, H. (1998): *Microeconomía Intermedia: un enfoque moderno*, 4ª edición, Antoni Bosch, Barcelona.

e) Los alumnos que deseen *ampliar los temas* pueden acudir a artículos clásicos de la teoría del consumo y de la producción como son los que se ofrecen a continuación, y que se encuentran señalados con (**R**) en el programa.

- Barten, A. (1977): "The systems of consumer demand functions: A review", *Econometrica*, Vol. 45, pp. 23-51.
- Chipman, J. y J. Moore (1980): "Compensating Variation. Consumer's Surplus and welfare", *American Economic Review*.
- Deaton, A. y J. Muellbauer (1980), "An Almost Ideal Demand System", *American Economic Review*, Vol. 70, pp.313-325.
- Diewert, W.E. (1974), "Applications of duality theory", en *Frontiers of Quantitative Economics II*, de M.D. Intrilligator y D.A. Kendrick (eds.), North Holland.
- Heathfield, D.F. (1974): *Funciones de Producción*, Ed. Macmillan-Vicens Vives.
- Koutsoyannis, A. (1982): *Non Price Decisions. The Firm in a Modern Contex*, MacMillan Press.

- Philps, L. (1983): *Applied Consumption Analysis*, 2ª ed., Amsterdam: North-Holland.

- Willig, R. (1977): "Consumer surplus without apology", *American Economic Review*, Vol. 66, nº4.

III. PROGRAMA DE LA ASIGNATURA

PRIMERA SECCIÓN

Teoría del comportamiento del consumidor y de la demanda

Tema 1. Preferencias y demanda

1.1 La estructura de las preferencias individuales del consumidor.

1.2 La función de utilidad. Existencia y propiedades.

1.3 El equilibrio del consumidor.

1.4 Teoremas fundamentales y propiedades de las funciones de demanda ordinaria.

1.5 Efectos de variaciones de renta y precios sobre las cantidades demandadas de equilibrio.

1.6 Relaciones entre bienes: complementaridad y sustituibilidad.

BIBLIOGRAFÍA:

Segura, J. (1993): cap.2. (secs. 1 a 5)

Varian, H. (1992): caps. 7 y 8.

(R) Deaton, A. y Muellbauer, J. (1980a): cap. 2.

(R) Philps, L. (1983): cap. 1.

Tema 2. Dualidad en el consumo

2.1 Funciones de demanda compensada y función de gasto. Deducción y propiedades.

2.2 La función indirecta de utilidad.

2.3 Restricciones sobre las funciones de demanda : condiciones de integrabilidad.

2.4 Formas específicas de las funciones de utilidad : aditividad, homogeneidad, homoteticidad y separabilidad.

BIBLIOGRAFÍA:

Segura, J. (1993): cap. 2. (secs. 6 a 8)

Varian, H. (1992): cap. 8

(R) Deaton, A. y Muellbauer, J. (1980a): cap. 2.

(R) Diewert, W.E. (1974).

Tema 3. Agregación en la teoría el consumo

3.1 Condiciones suficientes para la agregación: el teorema del bien compuesto.

3.2 Separabilidad de las preferencias. Tipos de separabilidad e implicaciones empíricas

3.3 Agregación de consumidores: Teoremas de agregación

BIBLIOGRAFÍA:

Segura, J. (1993): cap. 2 (sec. 9)

Varian, H. (1992): cap. 9.

(R) Deaton, A. y Muellbauer, J. (1980a): caps. 5 y 6.

Tema 4. Ampliaciones del modelo básico

4.1 Elección trabajo-ocio: La oferta de trabajo. Salario de espera e impuestos.

4.2 Elección intertemporal: consumo -ahorro.

4.3 Comparación entre situaciones alternativas : el excedente del consumidor, variación compensada y equivalente

4.4 Comparación entre situaciones alternativas : números índice de precios, coste de la vida y reales.

BIBLIOGRAFÍA:

Segura, J. (1993): cap.4 (sec. 3, 4, 5 y 6)

Varian, H. (1992): caps. 9, 10 y 19

(R) Deaton, A. y Muellbauer, J. (1980a): caps. 4, 6, 11, 12, 13 y 14.

(R) Willig, R. (1977)

Tema 5. Aplicaciones de la teoría de la demanda

5.1 Especificación de sistemas completos de demanda.

5.2 El Sistema Lineal de Gasto y las Formas Funcionales Flexibles: modelo de Rotterdam y Sistema "Casi Ideal de Demanda".

BIBLIOGRAFÍA:

Segura, J.(1993): cap. 4 (apartado 1).

Varian, H.(1992): cap. 12.

(R) Barten, A. (1977)

(R) Chipman, J. y Moore, J. (1980)

(R) Deaton, A. y Muellbauer, J. (1980a): caps.3 y 7.

(R) Deaton, A. y Muellbauer, J. (1980b)

CUESTIONES Y PROBLEMAS DE LA SECCIÓN I

A) CUESTIONES

1.- Responda a las siguientes cuestiones:

a) Deduzca las propiedades de las Funciones de Demanda resultantes cuando las preferencias de un consumidor se representan mediante Funciones de Utilidad homogéneas.

b) Defina el concepto de Función de Utilidad homotética y derive el tipo de Funciones de Gasto con el que se asocian estas preferencias.

c) Explique la relación existente entre las Funciones de Utilidad homogéneas y las homotéticas.

2.- Explique y formule analíticamente, en términos de las funciones de demanda marshallianas $x_i(\mathbf{p},y)$, donde i=1...n) hace referencia a bienes, las restricciones habituales que impone la Teoría sobre los sistemas completos de demanda de bienes de consumo.

3.- Haciendo uso de los efectos renta y sustitución, discuta analíticamente como varía la cantidad demandada de un bien cuando varía su propio precio y el precio de otro bien cualquiera, manteniéndose constantes la renta nominal y los demás precios.

4.- Defina, represente gráficamente y compare entre sí las siguientes medidas empleadas para analizar los cambios experimentados en el bienestar individual cuando se produce una variación en el precio de uno de los bienes consumidos:

a) El Excedente

b) La Variación Compensada

c) La Variación Equivalente

5.- Explique y demuestre analíticamente las restricciones impuestas por la teoría sobre las funciones de demanda marshallianas del tipo $x_i(\mathbf{p},y)$, donde i= 1,...n, hace referencia a bienes.

6.- Si la demanda de un consumidor se expresa mediante un sistema completo de *n* ecuaciones del tipo:

$$s_i = d \log x_i = \sum_k \theta_{ik} \; d \log p_k \; + \mu_i \, d \log y \qquad (i=1......n)$$

donde $s_i = p_i x_i / G(\mathbf{p},U)$ es la participación en el gasto total del bien i-ésimo (i=1...n), y los parámetros θ_{ik} y μ_i se definen como $\mu_i = p_i(\partial x_i/\partial y)$, $\theta_{ik}= (p_i p_k/y)(\partial x_i/\partial p_k)$, deduzca las condiciones que es preciso imponer sobre θ_{ik} y μ_i para que se verifiquen las restricciones impuestas por la teoría (condiciones de Cournot, Engel, homogeneidad y simetría).

7.- Suponga que las preferencias de un consumidor se representan mediante una función de utilidad:

$$U(x) = \prod_{j=1}^{n} (x_j - \gamma_j)^{\beta}$$

Bajo el supuesto de que $\gamma_j \geq 0$ deduzca el tipo de relación bruta (ε_{ij}) y neta (S_{ij}) existente entre todos los bienes.

8.- Demuestre analíticamente las propiedades de la función indirecta de utilidad $V(\mathbf{p}, y)$ y derive la relación existe entre estas propiedades y las de las funciones de utilidad $U(x)$ y de demanda marshalliana $x(\mathbf{p} , y)$.

9.- Demuestre analíticamente las propiedades de la función de gasto G(**p**, U) y derive la relación existente entre la concavidad de dicha función y el signo del efecto sustitución S_{ii}.

10.- Deduzca analíticamente las condiciones de integrabilidad que garantizan la existencia de funciones de demanda agregada del tipo:

$$Z_j(p,Y) = \sum_{h=1}^{H} x_j^h(p,y^h)$$

11.- Sea un consumidor cuya demanda se expresa mediante un sistema completo de ecuaciones del tipo:

$$S_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \log p_j + \beta_i \log(y/P)$$

siendo $S_i = p_i x_i / G(\mathbf{p},u)$, y $\log P = \alpha_0 + \sum_k \alpha_k \log p_k + (1/2) \sum_k \sum_j \log p_k \log p_j$.

Deduzca las restricciones que es preciso imponer sobre los parámetros α_i, γ_{ij} y β_i para que se verifiquen las condiciones de agregación (Engel y Cournot), homogeneidad y simetría.

12.- Suponga un consumidor cuyas preferencias se representan por la función de utilidad $U(x, x_0)$, donde x es un bien y x_0 es el ocio. Suponiendo que los ingresos de este individuo se componen de una renta no salarial (y) y unos ingresos procedentes del trabajo (wl), donde w es el salario hora y l el número de horas trabajadas, se pide:

a) Formule y represente gráficamente el equilibrio de este consumidor.

b) Haciendo uso de la ecuación de Slutsky, analice cómo afectará a su demanda de ocio una variación en el salario (w).

c) Formule la restricción presupuestaria resultante al incluir un seguro de desempleo consistente en el pago de una cantidad fija (y_d) en caso de que el consumidor no trabaje o lo haga por una jornada inferior a un límite prefijado de horas (l^*), y analice el efecto que la inclusión de este seguro tendrá sobre la oferta individual de trabajo.

B) PROBLEMAS

1.- Considere un consumidor cuyas preferencias vienen representadas por la función de utilidad $U(x_1,x_2)= x_1^{1/2}x_2^{1/2}$:

a) Derive las funciones de demanda marshallianas.

b) Calcule la función indirecta de utilidad y la función de gasto.

c) Analice las relaciones brutas y netas entre los bienes x_1 y x_2, hallando los efectos precio cruzados sin compensar y compensados.

Solución:

a) El primer problema planteado requiere resolver un problema de optimización condicionado. Maximizaremos la función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria, es decir:

$$\text{Max. } U(x_1,x_2) = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$$

$$\text{s.a: } x_1p_1 + x_2p_2 = Y$$

que conduce a un lagrangiano

$$\ell(x,\lambda) = x_1^{1/2}x_2^{1/2} - \lambda(x_1p_1 + x_2p_2 - Y)$$

Las derivadas parciales de esa ecuación son las condiciones (necesarias) de máximo. Habría que comprobar con las condiciones de segundo orden que se trata en verdad de un máximo, pero en general las funciones están diseñadas para que las condiciones de primer orden basten. Así pues,

$$dU/dx_1 = (1/2)x_1^{-1/2}x_2^{1/2} - \lambda p_1 = 0$$
$$dU/dx_2 = (1/2)x_2^{-1/2}x_1^{1/2} - \lambda p_2 = 0$$

despejando las λ e igualando se obtienen las siguientes relaciones

$$x_1 = (x_2p_2)/p_1$$
$$x_2 = (x_1p_1)/p_2$$

que se sustituyen en la restricción presupuestaria para obtener las funciones de demanda marshallianas:

$$x_2\ (p,Y) = y/2p_2$$
$$x_1\ (p,Y) = y/2p_1$$

b) La función indirecta de utilidad, deducida sustituyendo las funciones de demanda Marshallianas en la función de utilidad será:

$$V(p,Y) = (Y/2p_1)^{1/2}\ (Y/2p_2)^{1/2} = y/(4p_1p_2)^{1/2}$$

La función de Gasto asociada se obtiene fácilmente a partir de la función indirecta de utilidad, siendo y ≡ G; U ≡ V.

$$G(p,U) = 2U\,(p_1 p_2)^{1/2}$$

c) Examinando las funciones de demanda Marshallianas se concluye que:

$\partial x_1(p,Y)/\partial p_2 = \partial x_2(p,Y)/\partial p_1 = 0$, es decir, el precio de x_2 no influye en la cantidad de x_1 y viceversa ⇒ *Independientes brutos*

Para analizar las relaciones netas entre bienes deducimos en primer lugar las funciones de demanda compensada o Hicksianas:

$$\partial G(p,U) / \partial p_2 = h_2(p,U) = U(p_1/p_2)^{1/2}$$

demanda compensada del bien x_2

$$\partial G(p,U) / \partial p_1 = h_1(p,U) = U(p_2/p_1)^{1/2}$$

demanda compensada del bien x_1 y a partir de las mismas se deduce que:

$$\partial h_1(p,U)/\partial p_2 = \partial h_2(p,U)/\partial p_1 = (1/2)\,U\,(p_1 p_2)^{-1/2} > 0 \Rightarrow$$ *Sustitutos netos*

2.- Partiendo de la función de gasto $G(p,u) = 2u(p_1p_2)^{1/2}$ halle las funciones de demanda compensada para los dos bienes y la función indirecta de utilidad.

Solución

Las funciones de demanda compensada se deducen derivando la función de gasto respecto a cada uno de los precios:

$$\partial G(p,U)/\partial p_1 = h_1(p,U) = U(p_2/p_1)^{1/2}$$

$$\partial G(p,U)/\partial p_2 = h_2(p,U) = U(p_1/p_2)^{1/2}$$

La función indirecta de utilidad obtenida a partir de estas últimas será:

$$V(p,Y) = Y/\ 2(p_1p_2)^{1/2}$$

3.- Suponga un consumidor cuyas preferencias se representan mediante la función de utilidad:

$$U(x) = (x_1 - 2)(x_2 - 4)$$

a) Deduzca las funciones de demanda ordinaria de ambos bienes.

b) Derive la función indirecta de utilidad

c) Derive la función de gasto

Solución:

a) Responder a la primera cuestión requiere resolver, como siempre, un problema de optimización condicionada:

$$\text{Max } U(x) = (x_1 - 2)(x_2 - 4)$$

$$\text{s.a: } x_1\ p_1 + x_2\ p_2 = y$$

a partir del cual se deduce un lagrangiano:

$$\ell\,(x, \lambda) = (x_1 - 2)(x_2 - 4) - \lambda(\,x_1\,p_1 + x_2\,p_2 - y)$$

Sabemos que las condiciones de primer orden para un máximo exigen igualar a cero las derivadas parciales, de manera que:

$$d\ell/dx_1 = (x_2-4) - \lambda p_1 = 0$$

$$d\ell/dx_2 = (x_1-2) - \lambda p_2 = 0$$

Si despejamos las λ en las dos expresiones y las igualamos, obtenemos:

$$x_2 = (p_1/p_2)(x_1-2) + 4$$

$$x_1 = (p_2/p_1)(x_2-4) + 2$$

que se pueden sustituir alternativamente en la restricción presupuestaria para obtener las funciones de demanda ordinaria o marshallianas son

$$x_1 = (y - 4p_2 + 2p_1)/2p_1$$

$$x_2 = (y + 4p_2 - 2p_1)/2p_2$$

b) Las funciones indirectas de utilidad se obtienen sustituyendo las funciones de demanda marshallianas en la función de utilidad se deduce:

$$V(p,y) = (y - 4p_2 - 2p_1)^2/4p_1p_2$$

c) A partir de la función indirecta de utilidad, la función de gasto se obtiene despejando y, ya que suponemos que toda la renta se gasta. Se deduce que:

$$G(p,U) = y = (4p_1p_2\ U)^{1/2} + 2(p_1 + 2p_2)$$

4.- Sea un consumidor cuyas preferencias se representan mediante la función de utilidad:

$$U(x_1,x_2) = \min.\{x_2+2x_1,\ x_1+2x_2\}$$

a) Represente gráficamente la curva de indiferencia correspondiente al nivel de utilidad U=20.

b) ¿Qué valores debe tomar el cociente p_1/p_2 para que la decisión óptima del consumidor sea $x_1^*=0$?

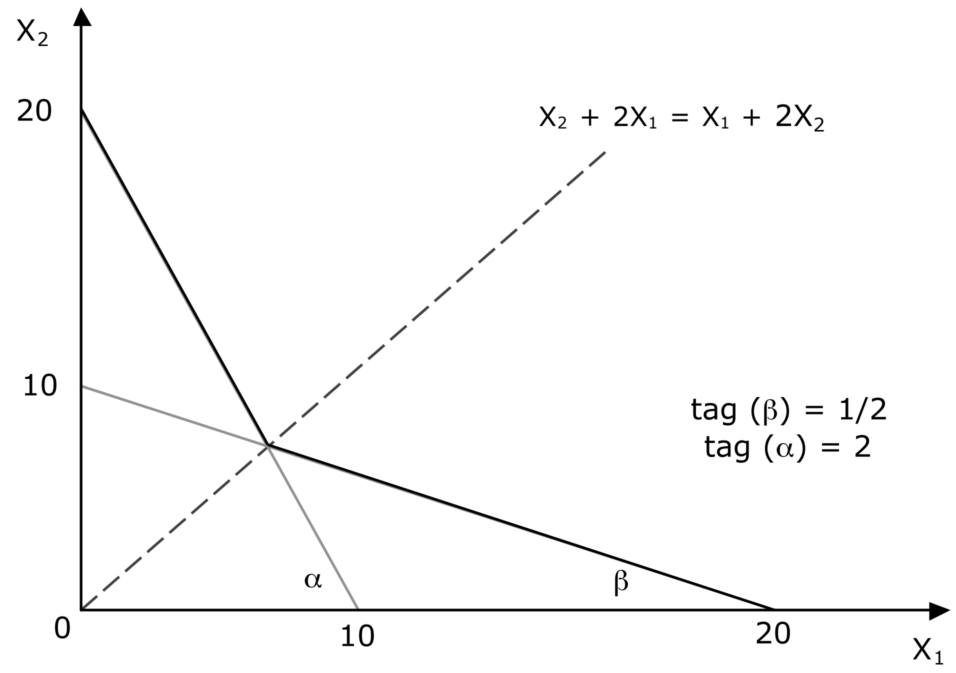
c) Si en el óptimo el individuo consume cantidades positivas de ambos bienes ($x_1^*\neq0$, $x_2^*\neq0$) ¿qué valor tomará el cociente ($x_1^*/\ x_2^*$) en dicho óptimo?

Solución:

a) La curva de indiferencia se deduce de representar simultáneamente las ecuaciones:

$$X_2 + 2X_1 = 20$$
$$X_1 + 2X_2 = 20$$

Es decir, los pares de x_1 y x_2 que garantizan una utilidad de 20 según cualquiera de las dos funciones. La curva de indiferencia resultante será aquella que



b) Si X_1 =0 entonces es X_2 =y/p_2 lo que implica que $p_1/p_2 > 2$

X_2 =0 entonces es X_1 =y/p_1 lo que implica que $p_1/p_2 < 1/2$

Expliquémoslo más despacio. Si se fija un nivel de utilidad igual a 20 la función de utilidad es el conjunto de cantidades de los dos bienes que dan esa utilidad. Bien ¿qué pasa si x_1=0? Pues que la función de utilidad queda U = min(x_2 , $2x_2$) donde es obvio que $2x_2 > x_2$. Así pues la función será u = (x_2), es decir, sólo depende de x_2. Entonces el individuo sólo consume x_2. ¿Cuál es la cantidad máxima que puede consumir de x_2 si gasta toda su renta en ese bien? Pues, obviamente, X_2 = y/p_2. El razonamiento es el mismo para el otro caso.

c) Si $2 > p_1/p_2 > 1/2$ el óptimo se sitúa sobre el radio-vector que parte del origen (en el "pico" de las curvas de indiferencia) a lo largo del cual se verifica que:

$$X_2 + 2X_1 = X_1 + 2X_2$$

y por lo tanto, será $X_1 = X_2$, decir $X_1/X_2 = 1$

5.- Considere un consumidor cuyas preferencias se representan mediante la Función Indirecta de Utilidad:

$$V(p,y) = y / \min\{p_1,p_2\}$$

se pide:

a) Deduzca la correspondiente función de Gasto de este consumidor.

b) Derive la función de demanda marshalliana del bien 1.

c) Derive la función de Utilidad

Solución

a) $G(p,U) = U \min. \{p_1,p_2\}$

b)
$$x_1 = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad p_1 > p_2 \\ y/p_1 & \text{si} \quad p_1 < p_2 \\ y/p_1 \geq x_1 \geq 0 & \text{si } p_1 = p_2 \text{ , tal que } x_1p_1 + x_2p_2 = y \end{array} \right.$$

c) La solución a este punto es $U(x) = x_1 + x_2$.

Si se sustituye $U(x) = x_1 + x_2$ en la función de gasto se tendrá que

$$G(p,x) = (x_1 + x_2) \min(p_1,p_2) = y$$

La solución del apartado b) explica cómo queda la función de gasto que acabo de poner en cada caso. En efecto, no puede ser de otra forma, porque la función de gasto G(p,x) tiene que ser igual a la renta (restricción presupuestaria).

6.- Suponga que las preferencias de un consumidor se representan mediante la función de utilidad $U(x_1,x_2) = -(1/x_1 + 1/x_2)$:

a) Deduzca las funciones de demanda marshallianas de ambos bienes.

b) Derive la función indirecta de utilidad.

c) Halle la función de gasto

d) Halle las funciones de demanda hicksianas.

Solución:

a) Para hallar las funciones de demanda marshallianas hay que resolver un problema de optimización condicionado que maximice $U(x_1,x_2) = -(1/x_1 + 1/x_2)$ sujeta a la restricción presupuestaria, es decir, $y = p_1x_1 + p_2x_2$.

El lagrangiano quedaría de la siguiente forma:

$$\ell\,(x, \lambda) = (-1/x_1 - 1/x_2) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - y)$$

Las condiciones de primer orden para un máximo son que las derivadas parciales se igualen a cero, es decir,

$$d\ell/dx_1 = 1/x_1^2 - \lambda p_1 = 0$$

$$d\ell/dx_2 = 1/x_2^2 - \lambda p_2 = 0$$

de donde podemos obtener la relación entre x_1 y x_2 despejando λ.

Otra posibilidad es acudir a la igualdad de las utilidades marginales ponderadas, y hacer $UM_1/p_1 = UM_2/p_2$. por tanto,

$$(1/x_1^2)/(1/x_2^2) = p_1/p_2$$

Por una vía o por otra alcanzamos la siguiente igualdad

$$x_2 = (p_1/p_2)^{1/2}x_1$$

que se sustituye en la restricción presupuestaria, de donde se deriva

$$x_1 = y/\ \{p_1 + (p_1p_2)^{1/2}\}$$

y de la misma forma llegamos a la expresión para x_2

$$x_2 = y/\ \{p_2 + (p_1p_2)^{1/2}\}$$

que son las demandas no compensadas.

b) La función indirecta de utilidad tiene una forma V(p,y). Para hallarla basta con sustituir las demandas marshallianas en la función de utilidad del tipo U(x), de manera que $U(x) = U(x_1,x_2) = U(x(p,y^0)$.

$$V(p,y) = -\ (1/y)\ [p_1 + p_2 + 2(p_1p_2)^{1/2}]$$

Y aplicando la propiedad según la cual una suma al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados más el doble producto del primer factor por el segundo, tenemos

$$V(p,y) = - (1/y) (p_1^{1/2} + p_2^{1/2})^2$$

c) La función de gasto es fácil de hallar. La función será del tipo G(p,U). Tendremos en cuenta que la utilidad V(p,y) = U(x), con lo que tendremos que

$$V(p,y) = - (1/y) (p_1^{1/2} + p_2^{1/2})^2 = U(x)$$

Y despejando y tendremos que

$$y = - \{(p_1^{1/2} + p_2^{1/2})^2\}/U$$

y por tanto

$$G(p,U)= y = - \{(p_1^{1/2} + p_2^{1/2})^2\}/U$$

Otra forma de hacerlo es sustituir las funciones de demanda de x_1 y x_2, halladas en el punto a), en la restricción presupuestaria.

d) Por último, las funciones hicksianas, que pueden compararse con las marshallianas en el cuadro de la página 52 del libro de Segura.

Dichas funciones se obtienen resolviendo un problema de optimización condicionada, en este caso de minimización de gasto. Sería del tipo

$$\min y = x_1 p_1 + p_2 x_2$$
$$\text{sujeto a } U = -(1/x_1 + 1/x_2)$$

El lagrangiano sería

$$\ell(x, \lambda) = x_1 p_1 + p_2 x_2 - \lambda(-1/x_1 - 1/x_2 - U)$$

Y sus primeras derivadas parciales conforman las condiciones necesarias para un mínimo. Las expresiones que obtendremos para x_1 y x_2 serán las mismas que vimos en el punto a). Si las sustituimos alternativamente en la restricción obtendremos las dos funciones hicksianas

$$h_1(p,U) = -\{1 + (p_2/p_1)^{1/2}\}/U$$

y

$$h_2(p,U) = -\{1 + (p_1/p_2)^{1/2}\}/U$$

7.- Considere un individuo cuyas preferencias están representadas por la función de utilidad $U(x, l_0) = x\, l_0 + l_0$, donde x representa el consumo y l_0 el número de horas de ocio. Si el número máximo de horas de trabajo diarias es $\Gamma = 24$, y el individuo sólo percibe rentas salariales , se pide:

a) Derive la función de oferta de trabajo de este individuo ($l = \Gamma - l_0$) y halle su salario de espera.

b) Si el precio del consumo fuera p=3 y el salario monetario por hora trabajada w=6 ¿cuántas horas desearía trabajar al día este consumidor?

c) Suponga que el gobierno establece un seguro de desempleo que percibirán todos aquellos individuos que no trabajen. Si se mantiene el salario vigente en w=6, determine la cuantía del seguro de desempleo a partir de la cual este individuo dejaría de trabajar.

Solución:

a) Se trata de solucionar el problema:

$$\text{Max. } U(x, l_0) = x\, l_0 + l_0$$

$$\text{s.a: } x\, p = w(l - l_0)$$

cuyo lagrangiano será: $\ell\,(x, l_0) = x\, l_0 + l_0 - \lambda\{x\, p - w(l - l_0)\}$

las condiciones de primer orden serán:

$$\partial\ell \,/\, \partial x = l_0 - \lambda p = 0$$

$$\partial\ell \,/\, \partial l_0 = x + 1 - \lambda w = 0$$

de donde se deduce que : $l_0 = \{p(1 + x)\}/w$

y sustituyendo en la restricción presupuestaria se obtiene la demanda del bien x:

$$x = (w\, l \,/\, 2p) - (1/2)$$

siendo la demanda de ocio:

$$l_0 = (p/2w) + 12$$

y la correspondiente oferta de trabajo:

$$l = 12 - (p/2w)$$

el salario de espera se deduce haciendo $l=0$: $w= p/24$

b) $l = 11,75$

c) El individuo dejará de trabajar cuando con ello obtenga mayor satisfacción (utilidad) que trabajando al salario vigente. Al salario vigente, será $l_0=12,3$ y $x= 23,5$ siendo su utilidad $U^0= 301,35$. Si no trabaja y, por tanto $l_0=24$, su consumo será $x =s/p =s/3$, siendo su utilidad $U^1= 24x + 24$. Dado que si $U^0 = U^1$ la da igual trabajar o no trabajar, se deduce que:

$$U^0 = U^1 \Rightarrow 24\,x + 24 = 301,35 \Rightarrow x=11,55$$

y como $x=s/3 =11,55$, será $s = 34,65$
Así pues, con $s > 34,65$ será $U^1 > U^0$ y preferirá trabajar.

8.- Las preferencias de un consumidor están representadas por la función de utilidad:

$$U(x,y,l_0)= 2\ln x + 2\ln y + \ln l_0$$

donde x e y son dos bienes de consumo y l_0 es el ocio. Si T es el tiempo total de que dispone este consumidor para repartirlo entre trabajo (l) y ocio (l_0) y su renta total está compuesta por un ingreso no salarial (c) y una renta salarial obtenida a cambio de su trabajo, remunerado a un salario-hora w, se pide:
a) Calcule las funciones de demanda marshallianas de cada uno de los bienes (x e y) y la oferta de trabajo de este consumidor.

b) Calcule las funciones de demanda resultantes bajo el supuesto de que este individuo se convierte en un parado.

c) Deduzca el salario mínimo a partir del cual este consumidor decidirá trabajar.

Solución:

a) Dado que l_0 = T - l podemos expresar el problema como:

$$\text{Max } U = 2 \ln x + 2 \ln y + \ln(T-l)$$

$$\text{s.a: } x\, p_x + y\, p_y = c + wl$$

siendo las condiciones de primer orden:

$$\partial \ell\, (x,y,\lambda)/\, \partial x = 2/x - \lambda p_x = 0$$

$$\partial \ell\, (x,y,\lambda)/\, \partial y = 2/y - \lambda p_y = 0$$

$$\partial \ell\, (x,y,\lambda)\, /\, \partial l = 1/\, (T- l) - \lambda w = 0;$$

dado que de la primera condición se deduce que $\lambda = 2/xp_x$, podemos expresar la última condición como $l = T - 1/\lambda w$, que sustituida en la restricción presupuestaria, junto a la expresión resultante de dividir la primera por la segunda condición ($y = x\, (p_x /p_y)$), se obtiene:

$$x = 2(c + wT)/\, 5\, p_x$$

$$y = 2(c + wT)/\, 5\, p_y$$

$$l = T - (c + wT/\, 5w)$$

b) Si l = 0 entonces es T = l_0 y el problema es:

$$\text{Max } U = 2 \ln x + 2 \ln y + \ln T$$

$$s.a: x\, p_x + y\, p_y = c$$

siendo las demandas en este caso: $x = c/2p_x$; $y = c/\, 2p_y$

9.- Considere un consumidor cuyas preferencias vienen representadas por la función de utilidad $U(x_1,x_2)= x_1^{1/2}+ cx_2$, donde c es una constante positiva:

a) Derive las funciones de demanda marshallianas de ambos bienes.
b) Demuestre que estas funciones de demanda verifican las condiciones de homogeneidad y de agregación de Engel, expresadas ambas en términos de las elasticidades resultantes para cada uno de los bienes.
c) Calcule las funciones de demanda compensada de los bienes, y justifique los resultados obtenidos comparándolas con las funciones de demanda marshallianas deducidas en el apartado a).

Solución:

a) $x_1 = (p_2 /2cp_1)^2$

$x_2 = (y/p_2 - p_2/4c^2p_1)$

b) En el libro de teoría están bastante claras las condiciones (páginas 57 y 58).

Condición de Agregación:

$S_1\, \varepsilon_{1\, y} + S_2\, \varepsilon_{2\, y} = 1$

se verifica al ser: $S_1 = p_2^2/4\, y\, p_1\, c^2$; $S_2 = 1- p_2^2/4\, y\, p_1\, c^2$; $\varepsilon_{1\, y} =0$;

$$\varepsilon_{2\, y} = 4\, y\, p_1\, c^2/(4\, y\, p_1\, c^2 - p_2).$$

Homogeneidad de Engel:

$\varepsilon_{1\,1} + \varepsilon_{1\,2} = - \varepsilon_{1\,y} \Rightarrow 2 - 2 = 0$

$\varepsilon_{2\,1} + \varepsilon_{2\,2} = - \varepsilon_{2\,y} \Rightarrow - p_2^2/ (4y\, p_1 c^2 - p_2^2) - 1 = 4\, p_1 y c^2/ (4y\, p_1 c^2 - p_2^2)$

También se cumple

c) $h_1 = (p_2/2cp_1)^2$

$h_2 = U/c - (p_2/2c^2 p_1)$

$\partial x_1/\partial y = 0 \Rightarrow x_1(p,y) = h_1(p,U)$ al ser el efecto renta nulo.

$\partial x_2/\partial p_1 > 0$ y $\partial h_2/\partial p_1 > 0 \Rightarrow$ sustitutos brutos y netos

10.- Considere un consumidor cuyas preferencias vienen representadas por la función de utilidad $U(x_1,x_2) = \text{Ln } x_1 + cx_2$, donde c es una constante positiva:

a) Derive las funciones de demanda marshallianas de ambos bienes.

b) Calcule la función Indirecta de Utilidad.

c) Deduzca los efectos renta y sustitución derivados de una variación en el precio del bien x_1 sobre las cantidades demandadas de ambos bienes.

Solución:

a) $x_1 = p_2/ cp_1$; $x_2 = \{y/p_2 - 1/c\}$

b) $V(p,y) = \ln p_2 - \ln c - \ln p_1 + (cy/p_2) - 1$

c) $dx_1/dp_1 = \partial h_1/\partial p_1 - x_1\, \partial x_1/\partial y = - (p_2/cp_1^2) \Rightarrow$ Efecto renta = 0;

efecto sustitución = efecto total

$dx_2/dp_1 = \partial h_2/\partial p_1 - x_1\, \partial x_2/\partial y = 0 \Rightarrow$ Efecto renta = $- 1/cp_1$;

efecto sustitución = $1/cp_1$

siendo $h_1 = x_1 = p_2/ cp_1$ y $h_2 = 1/c\{V- \ln (p_2/cp_1)\}$.

11.- Deduzca las funciones de demanda de los tres bienes consumidos por un individuo cuyas preferencias se pueden representar mediante la función de utilidad:

$$U(x)= (x_1 -3)(x_2 -6)^2(x_3)^3$$

Solución

La función presentada es un sistema lineal de gasto ("linear expenditure system", LES) con 3 bienes. Se demuestra en el texto de Segura (página 124 y siguientes) que si tenemos una función de utilidad del tipo

$$U(x) = \prod^{n}_{i=1} (x_i - \gamma_i)^{\beta i} \qquad (\beta_i>0,\ x_i>\gamma_i)$$

Las funciones de demanda serán

$$X_k(p) = \gamma_k + (\beta_k/p_k)\ (y - \Sigma^{n}_{\ell=1} p_\ell \gamma_\ell)$$

Donde se supone que $\Sigma_i\beta_i = 1$. Si los exponentes no suman la unidad, se puede realizar una transformación monótona creciente (que se puede admitir con utilidades ordinales) del tipo

$$V(x) = U(x)^{(1/\Sigma i\beta i)}$$

Donde la función V(x), que representa las mismas preferencias que U, ya es del tipo LES con exponentes que suman uno.

Este sería nuestro caso, porque $\Sigma_i\beta_i = 1+2+3 = 6$ y por tanto la función de utilidad

$$U(x)= (x_1 -3)(x_2 -6)^2(x_3)^3$$

Puede transformarse en

$$V(x) = U(x)^{1/6} = (x_1 -3)^{1/6} (x_2 -6)^{1/3} (x_3)^{1/2}$$

Y V(x) ya tiene exponentes que suman uno. Tenemos además que, en nuestro caso,

$$\Sigma^3_{k=1}\, p_k\gamma_k = 3p_1 + 6p_2 \quad \text{(dado que } \gamma_3=0\text{)}$$

Se concluye que

$X_1 (p_1, p_2, p_3) = 3 + (1/6p_1) (y-3p_1-6p_2) = 5/2 + y/6p_1 – p_2/p_1$

$X_2 (p_1, p_2, p_3) = 6 + (1/3p_2) (y-3p_1-6p_2) = 4 + y/3p_2 – p_1/p_2$

$X_3 (p_1, p_2, p_3) = (1/2p_3) (y-3p_1-6p_2) = y/2p_3 + 3p_1/2p_3 – 3p_2/p_3$

El problema puede resolverse por otras vías. Por ejemplo, haciendo la transformación logarítmica de la función de utilidad:

$$U^*(x) = \ln U = \ln(x_1 -3)+ 2 \ln(x_2 -6) + 3 \ln x_3$$

Y maximizando dicha función sujeta a la restricción $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = y$. El lagrangiano sería

$$\ell(x,\lambda) = \ln(x_1 - 3) + 2\ln(x_2 - 6) + 3\ln x_3 - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 - y)$$

Las condiciones de primer orden del lagrangiano serán

$$1/ x_1 - 3 = \lambda p_1$$

$$2/ x_2 - 6 = \lambda p_2$$

$$3/ x_3 = \lambda p_3$$

Despejando λ en cada ecuación e igualando tendremos

$$\lambda = 1/(p_1x_1 - 3p_1) = 2/(p_2x_2 - 6p_2) = 3/ p_3x_3$$

despejando p_1x_1 y p_2x_2 en función de p_3x_3:

$$p_1x_1 = (9\,p_1 + p_3x_3)/3$$

$$p_2x_2 = (2\,p_3x_3 + 18p_2)/3$$

y sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$y = 3p_1 + 6p_2 + 2\,p_3x_3$$

de donde:

$$p_3x_3 = (y - 3p_1 - 6p_2)/2 \Rightarrow x_3 = (y - 3p_1 - 6p_2)/2p_3$$

y sustituyendo en las expresiones de p_1x_1 y p_2x_2

$$x_1 = 3 + (y - 3p_1 - 6p_2)/6p_1$$

$$x_2 = 6 + (y - 3p_1 - 6p_2)/3p_2$$

También puede hacerse sin necesidad de linealizar la función de utilidad ni de resolver el problema de optimización, pues las condiciones necesarias de primer orden para máximo se pueden expresar como una igualdad de utilidades marginales ponderadas, de manera que

$$U_1/p_1 = U_2/p_2 = U_3/p_3$$

Y de ahí

$$[(x_2-6)^2\ x_3^3/p_1] = [2(x_1-3)(x_2-6)x_3^3/p_2] = [3(x_1-3)(x_2-6)^2x_3^2/p_3]$$

si eliminamos términos comunes tendremos:

$$x_2-6/p_1 = 2(x_1-3)/p_2 \qquad x_3/p_1 = 3(x_1-3)/p_3$$

reordenando

$$x_2 = 2(p_1/p_2)\ (x_1-3) + 6 \qquad x_3 = 3(p_1/p_3)(x_1-3)$$

sustituyendo en la restricción presupuestaria

$$y = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = p_1x_1 + [2p_1(x_1-3)+6p_2] + [3p_1(x_1-3)]$$

reordenando de nuevo

$$y = 6p_1x_1 - 6p_1 + 6p_2 - 9p_1$$
$$= 6p_1x_1 - 15p_1 + 6p_2$$

de donde

$$x_1 = 1/6p_1(y + 15p_1 - 6p_2) = y/6p_1 + 15/6 - p_2/p_1$$
$$= 5/2 + y/6p_1 - p_2/p_1$$

las demás soluciones pueden derivarse a partir de las condiciones de igualdad de las utilidades marginales ponderadas.

Sólo si la renta es suficientemente alta ($y \geq 3p_1+6p_2$) los resultados que hemos derivado son válidos, pues en otro caso no se cumplirían las restricciones del problema ($x_1 \geq 3$, $x_2 \geq 6$, $x_3 \geq 0$) y las utilidades marginales serían negativas.

12.- Si las preferencias de un consumidor se representan mediante la función de utilidad:

$$U(x_1,x_2)= x_1^{1/2} + x_2^{1/2}$$

a) Deduzca las funciones de demanda marsallianas de ambos bienes
b) Derive la función Indirecta de Utilidad.
c) Compruebe el Teorema de Roy.
d) Haciendo uso de los efectos precio cruzados, deduzca las relaciones (brutas y netas) entre ambos bienes.

Solución

a) $x_1= y\, p_2 / (p_1p_2 + p_1^2)$
   $x_2= y\, p_1 / (p_1p_2 + p_2^2)$

b) $V(\mathbf{p}, U) = y^{1/2} (p_1^{-1} + p_2^{-1})^{1/2}$

c) $x_1 = - \partial V(p,U)/\partial p_1 / \partial V(p,U)/\partial y = yp_2 / p_1 p_2 + p_1^2$

$x_2 = - \partial V(p,U)/\partial p_2 / \partial V(p,U)/\partial y = yp_1 / p_1 p_2 + p_2^2$

d) $\varepsilon_{12} = p_1 / p_1 p_2 > 0 \Rightarrow$ sustitutos brutos

$h_1(p, U) = (p_2 U / p_1 + p_2)^2 \Rightarrow \partial h_1 / \partial p_2 = S_{12} > 0 \Rightarrow$ Sustitutos netos

SEGUNDA SECCIÓN

Teoría de la producción

Tema 6. La tecnología

6.1 Representación de la tecnología.

6.2 Rendimientos a escala y tecnología

6.3 Sustituibilidad de factores: relación técnica de sustitución y elasticidad de sustitución.

BIBLIOGRAFÍA:

Segura, J. (1993): cap. 3 (sec. 1)

Varian, H. (1992): cap. 1.

(R) Heathfield, D.F. (1974)

Tema 7. La maximización del beneficio

7.1 El equilibrio del productor individual.

7.2 Funciones de demanda derivada de factores y oferta de producto. Propiedades.

7.3 La función de beneficios. Propiedades.

BIBLIOGRAFÍA:

Segura, J. (1993): cap. 3 (sec. 2)

Varian, H. (1992): caps. 2 y 3.

Tema 8. Dualidad y costes en la producción

8.1 La función de costes. Existencia y propiedades.

8.2 Funciones de demanda condicionada de factores y oferta de producto.

8.3 Funciones de costes y oferta de la empresa a corto y largo plazo.

8.4 Estática comparativa.

BIBLIOGRAFIA

Segura, J.(1993): cap. 3. (sec. 3)

Varian, H.(1992): caps. 4, 5 y 6.

Tema 9. La agregación en la teoría de la producción

9.1 Función de oferta de la industria a corto.

9.2 La oferta de la industria a largo plazo.

9.3 La demanda agregada de factores.

BIBLIOGRAFÍA:

Segura, J. (1993): cap. 3 (sec.4 y 5)

Varian, H. (1992): cap. 6 y 13 (sólo parte).

Tema 10. Ampliaciones del modelo básico

10.1 La producción conjunta

10.2 Cambio técnico y función de producción

BIBLIOGRAFÍA:

Segura, J. (1993): caps. 3 (sec. 6) y 4 (sec. 7)

Varian, H. (1992): cap. 12.

(R) Koutsoyannis, A. (1982): caps. 4 y 9

Tema 11. Aplicaciones de la teoría de la producción modelo básico

11.1 Formas específicas de las funciones de producción y costes.

11.2 Especificaciones de las funciones de producción y demanda derivada de factores.

11.3 Interpretación del cambio técnico.

BIBLIOGRAFÍA:

Segura, J. (1993): cap. 4 (secs. 2 y 7)

Varian, H. (1992): cap. 12.

(R) Koutsoyannis, A. (1982): caps. 4 y 9

(R) Heathfield, D.F. (1974)

CUESTIONES Y PROBLEMAS DE LA SECCIÓN II

A) CUESTIONES

1.- Sea la función de producción de una empresa $x= y_1\, y_2$:

a) Deduzca su correspondiente función de costes.

b) Analice si la función deducida en el apartado anterior verifica las propiedades exigidas por la teoría para ser considerada una "verdadera" función de costes.

2.- Suponga una empresa que produce un bien x combinando dos factores productivos, y_1 e y_2, de acuerdo con la función de producción $x = f(y_1,y_2)$:

a) Plantee analíticamente las soluciones primal y dual, y derive las condiciones de equilibrio de la empresa.

b) Represente gráficamente la senda de expansión de la empresa, indicando que es lo que muestra dicha senda, y analice el efecto que tendrá una reducción del precio relativo de los factores (q_2/q_1) sobre la proporción óptima (y_2/y_1).

3.- Demuestre analíticamente las propiedades de la función de beneficios de una empresa $\Pi(\mathbf{p},q)$, y derive la relación existente entre estas propiedades y las características de las funciones relevantes de demanda de factores y oferta de producto.

4.- Defina la función de beneficio de una empresa precio aceptante dadas sus funciones de oferta del producto, $x(q,p)$ y de demanda de factores, $y(q,p)$. Muestre la homogeneidad de grado uno de la función de beneficio, apoyándose en las propiedades de las funciones de demanda y oferta. Suponga que, de un período a otro, los precios del producto y los factores crecen en un 50%, y se introduce un impuesto proporcional sobre los beneficios del 20%. Explique cómo variará la producción, la demanda de factores y los beneficios de equilibrio de la empresa.

5.- "Los costes medios a corto plazo son siempre superiores a los costes medios a largo plazo". Razone si esta afirmación es verdadera o falsa. ¿Coinciden ambos costes en algún punto? ¿Qué implica este resultado gráficamente?

6.- Sea la función de costes de una empresa $C(q_1,q_2, x)= (q_1^a q_2^b)x$. Deduzca los valores que deben tomar los parámetros a y b para que dicha función verifique las propiedades exigidas por la teoría.

7.- En la función de costes $C(q, x) = q_1^a \ q_2^b \ x$ ¿qué restricciones deben imponerse sobre los parámetros a y b para que sea una verdadera función de costes?

8.- Sea la función de costes de una empresa $C(q_1,q_2, x)= x^{1/2}(2q_1^{1/2}q_2^{1/2})$.

a) Analice si esta función verifica las propiedades exigidas por la teoría para ser considerada una "verdadera" función de costes.

b) Si su respuesta al apartado anterior es afirmativa, deduzca la función de producción de la que procede esta función de costes.

B) PROBLEMAS

1.- Si la función de producción de una empresa viene dada por $X = AK^{1/4}L^{1/4}$, donde A es una constante positiva:

a) Derive la función de costes a largo plazo.

b) Derive las funciones de oferta del producto y demanda de factores a largo plazo.

c) Derive la función de oferta a corto plazo suponiendo que K es fijo e igual a uno, y compare la función resultante con la oferta a largo plazo.

d) Suponiendo que A=1 y que los precios de los factores son $q_k=q_L=1$ ¿cual sería el nivel de producción para el que K=1 será el tamaño óptimo de la empresa a largo plazo?

Solución:

a) Planteando el problema de minimización de costes:

$$\text{Min. } q_L\, L + q_k\, K$$
$$\text{s.a: } X = AK^{1/4}\, L^{1/4}$$

de donde derivamos el correspondiente lagrangiano

$$\ell\,(L,K,\lambda) = q_L L + q_K K + \lambda(\, AK^{1/4}\, L^{1/4} - X)$$

Y a partir de sus derivadas parciales se obtienen las condiciones de primer orden de mínimo:

$$\partial\ell\,(L,K,\lambda)/\partial L = q_L + \lambda\,(A/4)\, K^{1/4}\, L^{-3/4} = 0$$

$$\partial\ell\,(L,K,\lambda)/\partial K = q_k + \lambda\,(A/4)\, K^{-3/4}\, L^{1/4} = 0$$

$\partial\ell\ (L,K,\lambda)/\partial\lambda = AK^{1/4}\ L^{1/4} - X = 0$

de las dos primeras condiciones se puede despejar en ambas expresiones e igualar λ, o bien despejar en cada expresión q_K y q_L y después dividir ambas expresiones.

El caso es que podremos obtener la siguiente equivalencia:

$$q_L/q_k = K/L$$

y a partir de ella puede deducirse que $K = L(q_L/q_K)$ o que $L = K(q_K/q_L)$.

Si despejamos X en la tercera condición de mínimo (la tercera derivada parcial del lagrangiano) y elevamos al cuadrado tendremos

$$(AK^{1/4}\ L^{1/4})^2 = X^2$$
$$K^{1/2}\ L^{1/2} = (X/A)^2$$

Donde sustituimos ahora, por ejemplo, $K = L(q_L/q_K)$, y obtenemos

$$(Lq_L/q_k)^{1/2}\ L^{1/2} = (q_L/q_k)^{1/2}$$
$$L = (X/A)^2$$

y de ahí

$$L = (q_k/q_L)^{1/2}\ (X/A)^2$$

Que es la demanda condicionada del factor L.

De la misma forma se hace con el otro factor, sustituyendo $L = K(q_K/q_L)$ en la expresión preparada a partir de la tercera condición de primer orden de mínimo. Así obtenemos

$$K^{1/2}\,(Kq_k/q_L)^{1/2} = K\,(q_k/q_L)^{1/2} = (X/A)^2$$

y de ahí

$$K = (q_L/q_k)^{1/2}\,(X/A)^2$$

Así pues las demandas condicionadas de factores son:

$$K(q,X) = (q_L\,/q_k)^{1/2}\,(X/A)^2$$
$$L(q,X) = (q_k\,/q_L)^{1/2}\,(X/A)^2$$

Si sustituimos ambas demandas en la función de costes

$$C(q,L,K) = q_L\,L + q_k\,K$$

Tendremos

$$\begin{aligned} C(q,X) &= q_L\,L + q_k\,K \\ &= q_L\,(q_k/q_L)^{1/2}\,(X/A)^2 + q_k\,(q_L/q_k)^{1/2}\,(X/A)^2 \\ &= (q_L\,q_k)^{1/2}\,(X/A)^2 + (q_L\,q_k)^{1/2}\,(X/A)^2 \\ &= (X/A)^2\,[(q_L\,q_k)^{1/2} + (q_L\,q_k)^{1/2}] \\ &= 2[(q_L\,q_k)^{1/2}\,(X/A)^2] \end{aligned}$$

Por lo que la función de costes será:

$$C(q,X) = q_L\, L(q,X) + q_k\, K(q,X) = 2[(q_L\, q_k)^{1/2}\, (X/A)^2]$$

b) La solución a la segunda pregunta requiere resolver un problema de maximización como este:

$$\text{Max}\ \Pi = pX - 2[(q_L\, q_k)^{1/2}\, (X/A)^2]$$

Para ello se deriva con respecto a X y se iguala a cero (condición de primer orden de máximo):

$$\partial\Pi/\partial X = p - 4X(q_L\, q_k)^{1/2}]/A^2 = 0$$

y de ahí

$$X(p,q) = pA^2/\ 4(q_L\, q_k)^{1/2}$$

Que es la función de oferta a largo plazo.

Sustituyendo en las demandas condicionadas de factores antes obtenidas se deducen las demandas de factores a largo plazo que maximizan los beneficios a largo plazo:

$$L(p,q) = (1/16)\ A^2p^2\ q_k^{-1/2}\ q_L^{-3/2}$$
$$K(p,q) = (1/16)\ A^2p^2\ q_k^{-3/2}\ q_L^{-1/2}$$

Si sustituimos ahora esas demandas de factores y la función de oferta obtenidas en la función de beneficios, obtenemos

$$\Pi(X,q_L,q_k) = p\ X - q_L\ L - q_K\ K$$
$$= p\ [pA^2/4(q_Lq_K)^{1/2}] - q_L\ [(1/16)A^2p^2q_K^{-1/2}q_L^{-3/2}] - q_K\ [(1/16)\ A^2p^2\ q_K^{-3/2}\ p_L^{-1/2}]$$

$$= A^2\,(1/8)\,p^2\,q_L^{-1/2}\,q_K^{-1/2}$$

que es una función de beneficios.

c)

Si K=1 la función de producción a corto plazo será $X=AL^{1/4}$ y, por tanto $L=(X/A)^4$.

La función de costes a corto es:

$$C(q, X) = q_k + q_L\,(X/A)^4$$

y a partir de esta, la función de oferta a largo se deduce de solucionar el problema:

$$\text{Max } \Pi = pX - \{\, q_k + q_L\,(X/A)^4 \}$$

cuya condición de primer orden de máximo es

$$\partial\Pi/\partial X = p - q_L\,4\,X^3/A^4 = 0$$

Que, despejando, nos conduce a la buscada función:

$$X(p,q) = A^{4/3}\,(p/4)^{1/3}\,q_L^{-1/3}$$

d)

$A=q_k=q_L= 1$ implica que las funciones de costes son:

a largo plazo: $C(X) = 2X^2$

a corto plazo: $C(X) = 1 + X^4$

teniendo en cuenta que

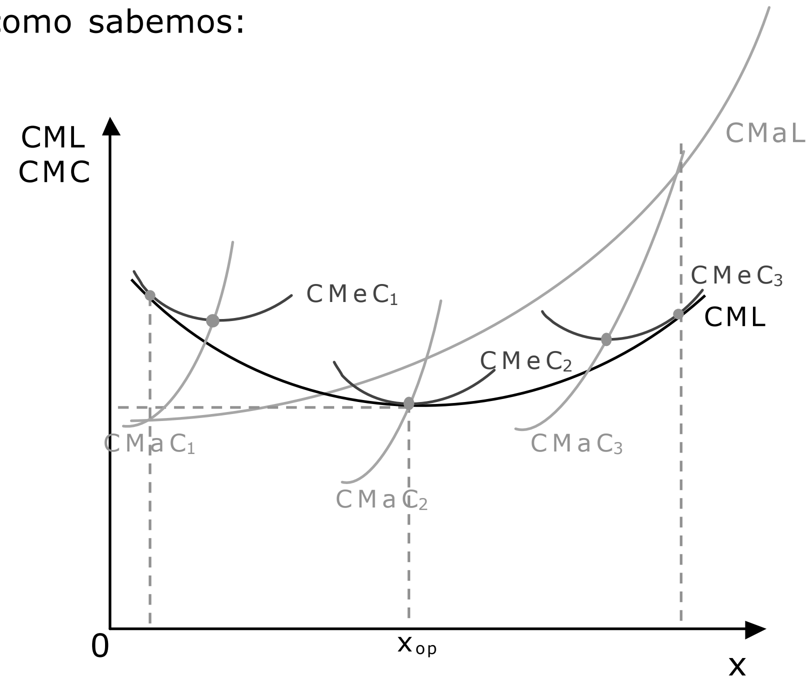
$$C(q,X) = 2[(q_L\ q_k)^{1/2}\ (X/A)^2]$$

Es la función de costes a largo, y

$$C(q, X) = q_k + q_L\ (X/A)^4$$

Es la función de costes a corto para K=1 (donde K es el factor fijo).

La cantidad óptima del factor fijo es, en este caso, la escala de la planta. Nos están preguntando por la escala de la planta de producción, pero al revés: dada una determinada escala ¿para qué producción dicha escala es la adecuada? La escala es la adecuada si el coste medio a corto plazo coincide con el coste medio a largo plazo, como sabemos:



Donde CMaC son los costes marginales a corto plazo, CMaL el coste marginal a largo plazo, CMeC los costes medios a corto y

CMeL el coste medio a largo plazo. Como puede observarse hay distintas plantas, adecuadas para distintos niveles de producción, aunque sólo una de ellas tiene el tamaño óptimo (la 2). En este problema sólo conocemos el stock de capital fijo, que implica un determinado tamaño de planta, y nos piden calcular la producción para la que ese tamaño es adecuado. Nos piden en definitiva el punto de tangencia entre CmeC y CmeL.

Por tanto, la condición que permite resolver el problema es $2X^2 = 1 + X^4$, de donde X=1**,** siendo este el volumen de producción para el que los Costes Medios a corto y largo plazo coinciden.

2.- Si la función de producción de una empresa viene dada por: $X=A(L^{-1} + K^{-1})^{-1}$:

a) Determine el tipo de rendimientos a escala que presenta la tecnología y derive la Relación Marginal de Sustitución entre factores.

b) Obtenga las funciones de demanda condicionada de factores y la función de costes a largo plazo.

c) Derive la función de oferta de la empresa a corto plazo suponiendo que K es constante e igual a 2.

Solución:

a) Expresando la función de producción de forma alternativa como $X=A\{KL/(K+L)\}$ se deduce que:

$$X(\lambda K,\lambda L) = A\{(\lambda K)(\lambda L)/(\lambda K+\lambda L)\} = A\{(\lambda^2(KL)/\lambda(K+L)\} = \lambda A\{KL/(K+L)\}$$

por tanto existen rendimientos constantes a escala.

La *Relación Técnica de Sustitución* entre factores será:

$$RTS_{K,L} = \{\partial X(K,L)/\partial L\}/ \{\partial X(K,L)/\partial K\}= K^2/ L^2$$

b) Solucionando el problema de optimización restringida:

$$\text{Min. } q_L\, L + q_K\, K$$

$$\text{s.a: } X = A(\ KL/\ K+L)$$

se deducen las demandas condicionadas de factores :

$$L(q,X) = X/A \{\ 1 + (q_K/\ q_L\ )^{1/2}\}$$

$$K(q,X) = X/A \{\ 1 + (q_L/\ q_K\ )^{1/2}\}$$

siendo la función de Costes:

$$C(q,X) = q_L\, L\ (q,X) + q_K\, K\ (q,X) = X/A\ \{q_L^{1/2} + q_K^{\ 1/2}\}^2$$

c) Si $K=2$ la función de producción se transforma en $X=\{(1/2) + (1/L)\}^{-1} = 2AL\ /\ L+2$ de donde se deduce que $L = X/\ \{A- (X/2)\}$. La función de Costes a corto plazo será entonces :

$$C(q,X) = 2q_K + q_L\{X/\ A- (X/2)\}$$

A partir de esta función se deduce la de Costes Marginales :

$$CMg(X) = 2Aq_L/\ \{A- (X/2)\}^2$$

Por tanto, la curva de oferta deducida igualando el precio al CMg será:

$$X(p,q) = 2\ \{\ A- (2Aq_L)^{1/2}\ \ p^{\ -1/2}\}$$

3.- Suponga que una empresa lleva a cabo su producción de acuerdo con la función $X = K^{1/3}L^{1/3}$. Si los precios de los factores son $q_K=q_L=1$, se pide:

a) Calcule las funciones de demanda de ambos factores y la oferta de producto a largo plazo.

b) Bajo el supuesto de que el capital (K) es fijo e igual a la unidad a corto plazo, deduzca las funciones de demanda de ambos factores y la oferta de producto.

c) Calcule y compare las elasticidades de las funciones de oferta a corto y largo plazo.

Solución:

a) La solución a la primera cuestión requiere plantear y resolver un problema de optimización condicionado como este:

$$\text{Max. } \Pi(X) = pX - K - L$$
$$\text{s.a: } X = K^{1/3}L^{1/3}$$

donde se supone que K y L son el producto de los factores de producción trabajo y capital multiplicados por sus precios. El problema conduce a un lagrangiano del tipo

$$\ell\,(x, \lambda) = pX - K - L - \lambda(K^{1/3}L^{1/3} - X)$$

Las derivadas parciales igualadas a cero son las condiciones necesarias de primer orden para la existencia de máximo. En efecto:

$$d\Pi/dK = (p/3)K^{-2/3}L^{1/3} - 1 = 0$$
$$d\Pi/dL = (p/3)L^{-2/3}K^{1/3} - 1 = 0$$

de la primera de las expresiones, despejando, obtenemos

$$L = (3/p)^3K^2$$

Que sustituida en la segunda condición, tras las operaciones necesarias nos da las funciones de demanda de factores:

$$L = K =(p/3)^3$$

y la oferta de producto se obtiene simplemente sustituyendo las funciones anteriores en la función de producción, lo que nos lleva a

$$X = (p/3)^2$$

b) Si K=1 a corto plazo, la función de producción será: $X = L^{1/3}$, de donde $L = X^3$. El problema puede resolverse planteando un problema de optimización (maximizción), de manera que

$$\text{Max. } \Pi(X) = pX - 1 - X^3$$

Tiene una condición de primer orden de máximo en

$$d\Pi/dX = p - 3X^2 = 0$$

de donde se obtiene inmediatamente la oferta del producto:

$$X=(p/3)^{1/2}$$

La función de demanda del factor trabajo es fácil de obtener, pues sabemos por el punto a) que $L = (3/p)^3K^2$, y sustituyendo $K = 1$ tenemos

$$L= (p/3)^{3/2}$$

c) La última cuestión pide calcular y comparar las elasticidades de la oferta a corto y largo plazo. Sabemos que a largo plazo no hay restricciones en el uso de los factores. Por lo que la función de oferta a largo plazo será la obtenida en el apartado a), $X=(p/3)^2$, y la función a corto plazo la obtenida en el apartado b), $X=(p/3)^{1/2}$.

Las elasticidades, como sabemos, miden la variación en la cantidad ofertada ante una variación infinitesimal en el precio, es decir,

$\varepsilon_{LP} = (p/x)(\partial x/\partial p)$

que tras las oportunas operaciones nos da $\varepsilon_{LP} = 2$.

Repitiendo la operación para la elasticidad a corto plazo tendremos $\varepsilon_{CP} = 1/2$ y, por tanto, $\varepsilon_{LP} > \varepsilon_{CP}$.

4.- Si la tecnología de una empresa se representa mediante la función de producción $X=Y^a$, siendo $0< a < 1$, deduzca:

a) La función de demanda de factores

b) La función de oferta del producto

c) La función de beneficios

Solución:

a) Planteando el problema de maximización de beneficios:

$$\text{Max } \Pi(Y)= p\, Y^a- q\, Y$$

Si la empresa maximiza beneficios y no se ve limitada en el uso del factor de producción Y, la empresa resolverá un problema del tipo:

$$\max \Pi\ (y) = \max p\ Y^a - q\ Y \text{ (sometido a que } Y \geq 0)$$

Si suponemos que Y > 0, la condición necesaria de primer orden para un máximo es

$$0 = d\Pi(Y)/dY = d(p\ Y^a - q\ Y)/dY = a\ p\ Y^{a-1} - q$$

de donde resulta la demanda del factor

$$Y(p,q) = (q/ap)^{1/a-1} = (ap/q)^{1/1-a}$$

Y es decreciente en q y homogénea de grado cero en (p,q). Además, dado que p>0 y q>0 resulta que Y >0, y la empresa siempre producirá alguna cantidad, es decir, lo se dará un máximo en el que $Y = 0$ y $d\Pi(Y)/dY \leq 0$.

b) Sustituyendo la demanda de factores en la función de producción, se obtiene la función de oferta a largo plazo:

$$X(p,q) = [Y(p,q)]^a = (q/ap)^{a/a-1} = (ap/q)^{a/1-a}$$

Que es creciente en p y homogénea de grado cero en (p,q), pues a/1-a >0 por hipótesis.

Un caso interesante se produce cuando $a \rightarrow 1$, porque $X \rightarrow \infty$ si p>q, a la vez que $X \rightarrow 0$ si p < q. Ese resultado se entiende cuando analizamos la función de beneficios para un valor a = 1. La función sería

$$\Pi\ (Y)_{a=1} = p\ Y - q\ Y = (p\text{-}q)\ Y$$

por tanto, si p > q, se maximizará el beneficio produciendo la máxima cantidad posible, y si q < p se maximizará haciendo Y = 0. Por otra parte, si p = q, el beneficio es siempre cero, y la cantidad producida puede ser cualquiera. De todos modos, en nuestro problema, por hipótesis, es siempre a < 1.

c) Sustituyendo las funciones de demanda de factores y de oferta de producto a largo plazo, la función de beneficios resultante será:

$$\Pi\ (p,q) = pX(p,q) - qY(p,q) = p\ (q/ap)^{a/a-1} - q\ (q/ap)^{1/a-1} =$$
$$p\ (ap/q)^{a/1-a} - q\ (ap/q)^{1/1-a}$$

Π es creciente en p, decreciente en q y homogénea de grado 1 en (p,q).

5.- Si la tecnología de una empresa se representa mediante la función de producción X= 20 Y- Y^2 siendo el precio del producto p=1 y X ≥0, se pide

a) La función de demanda de factores

b) La función de beneficios

c) ¿Para qué valor de q (precio de los factores) el volumen de producción óptima es igual a 10?

Solución

a) La función de demanda de factores puede obtenerse resolviendo un problema de optimización relativamente sencillo, pues hay un solo factor de producción:

$$\text{Max } \Pi(Y)= p(20Y- Y^2) - qY$$

Donde p es el precio del producto x y q es el precio del factor de producción Y.

Sabemos que la condición de primer orden de máximo es

$$d\Pi(Y)/dY = 20p - 2Y - q = 0$$

$$\Rightarrow Y(p,q)= 10 - (q/2)$$

b) La función de beneficios se obtiene restando a la función de ingresos la función de costes. Por tanto

$$\Pi(p,q)= 20\,Y- Y^2 - qY = (20-q-Y)Y$$

y sustituyendo la función de demanda del factor de producción Y

$$\Pi(p,q)= (10- q/2)^2$$

c) Igualamos a 10 la función de oferta de la empresa

$$X = 100 - q^2/4 =10$$

De donde se deduce inmediatamente que

$$q = 18{,}97$$

6.- Si la función de producción de una empresa es $X= \min.\{y_1, y_2\}^a$, hallar la demanda de factores y la función de beneficios.

Solución:

Dado que los factores son complementarios perfectos será : $y_1^a=y_2^a = X$, siendo entonces la función a maximizar:

$$\text{Max } p\, y_1^a - q_1\, y_1 - q_2\, y_2$$

cuyas condiciones de primer orden serán:

$$pa\; y_1^{a-1} - (q_1 + q_2) = 0$$

de donde se deducen funciones de demanda de factores y función de beneficios idénticas que si la f. de producción es $f(x) = y^a$, pero ahora, el precio del factor es $q_1 + q_2$. Para que exista un máximo debe ser $a < 1$.

7.- Si la función de producción de una empresas es $x= \min.\{2y_1 + y_2,\ y_1 + 2y_2\}$ determine la función de costes y las demandas condicionadas de factores.

Solución:

Si usa la primera técnica: $x = 2y_1 + y_2$ que es una ecuación lineal (factores sustitutivos), con lo cual, la empresa se especializará en un factor, de forma que será $y_1 = x/2$ o bien $x = y_2$, según cual de los dos factores sea el más barato. Por tanto, la función de costes de esta técnica será:

$$C(q,x) = \min.\{(xq_1)/2\ ,\ xq_2\} = x\ \min.\{q_1/2\ ,\ q_2\}$$

Igualmente, con la segunda técnica será $x = y_1 + 2y_2$ y por tanto $y_1 = x$ o bien $y_2 = x/2$, siendo la función de costes:

$$C(q,x) = \min.\{(xq_1),\ (xq_2)/2\} = x\ \min.\{q_1,\ q_2/2\}$$

puesto que usa ambas técnicas para producir y será:

$$C(q,x) = x\ \{\min.\{q_1/2\ ,\ q_2\} + \min.\{q_1,\ q_2/2\}\}$$

8.- Sea la función de producción de una empresas $x = \max\ \{y_1,\ y_2\}$ hallar la demanda condicionada de factores y la función de costes.

Solución:

En este caso la empresa sólo usará el factor relativamente más barato siendo la función de demanda condicionada del factor i-ésimo:

$$y_i = \left|\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & q_i > q_j \\ x & \text{si} & q_i < q_j \\ x \geq y_i \geq 0 & \text{si} & q_i = q_j \end{array}\right.$$

La función de costes será: $C(w,y) = \min.\{w_1,\ w_2\}$

9.- Sea la función de costes de una empresa $C(q,x) = x\ \min.\{q_1,\ q_2\}$ ¿cual es su función de producción? ¿y las demandas condicionadas de los factores?

Solución:

La función de producción es lineal: $x= y_1 + y_2$

La demanda de factores (sustitutivos) es:

$$y_i = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad q_i>q_j \\ x \quad \text{si} \quad q_i< q_j \\ x \geq x_i \geq 0 \quad \text{si} \quad q_i=q_j \end{cases}$$

10.- Si la función de producción de una empresa se expresa como :

$$x = 100\, y_1^{1/2}y_2^{1/4}:$$

a) Halle su función de costes.

b) Utilizando la función de costes, deduzca su función de oferta.

c) Derive la función de beneficios de esta empresa.

Solución:

a) Para hallar la función de costes deberá resolverse el problema:

$$\text{Min. } q_1y_1 + q_2y_2$$

$$\text{s.a} : x = 100\, y_1^{1/2}\, y_2^{1/2}$$

de donde se deduce:

$$C(q_1,q_2,x) = 100^{-4/3}(2^{1/3} + 2^{-2/3})\{q_1^{2/3}\, q_2^{1/3}x^{4/3}\}= k\, q_1^{2/3}\, q_2^{1/3}x^{4/3}$$

siendo $k= 100^{-4/3}(2^{1/3} + 2^{-2/3})$

b) A partir de la función de costes, la oferta se deducirá solucionando el problema de maximización del beneficio:

$$\text{Max. } \Pi = p\,x - \ k\{q_1^{2/3}\, q_2^{1/3}x^{4/3}\}$$

$\partial\Pi/\partial x = p - (4/3)\, k\, q_{2/3}\, q_2^{1/3}\, x^{4/3} =0 \Rightarrow x= (3/4k)^3\, (p^3/\, q_1^2q_2$

c) $\Pi = p(3/4k)^3 (p^3/ q_1^2 q_2) - k(3/4k)^4 (p^4/ q_1^2 q_2) = (1/4)(3/4k)^3 (p^4/ q_1^2 q_2)$

11.- Si la función de producción de una empresa precio aceptante es $L = x - x^2 + x^3$, donde L es la cantidad de trabajo utilizado y **x** representa la producción del período.

a) Derive la función de oferta del producto si el precio por unidad de trabajo es w=1.

b) Determine las producciones para las que la empresa experimenta rendimientos crecientes y decrecientes a escala.

c) Determine la producción y el precio a partir de los cuales la empresa obtiene beneficios.

Solución

a) Max $px - wL \quad \Rightarrow x = (1/3)\{1 + (3p - 2)^{1/2}\}$

s.a: $L = x - x^2 + x^3$

b) Min $(C/x) = 1 - x + x^2 \Rightarrow$ Habrá rendimientos crecientes a escala para $x<1/2$ y decrecientes para $x > 1/2$.

c) La empresa obtiene beneficios a partir del nivel de producción correspondiente al mínimo de los costes medios ($x = 1/2$), siendo el precio correspondiente a este volumen de producción $p = 1 - 2x + 3x^2 = 3/4$.

12.- Si la tecnología de una empresa se representa mediante la función de producción:

$X = a \, Lny_1 + b \, Lny_2$ donde a, b>0 (i=1,2), se pide:

a) Obtenga las funciones de demanda de factores y oferta del producto que maximizan el beneficio de la empresa.

b) Derive la función de beneficios de la empresa.

c) Deduzca las demandas condicionadas de factores y la función de costes a largo plazo.

Solución:

a) Lo primero es la función de beneficios de la empresa, que se construye sustrayendo a los ingresos los correspondientes gastos

$$\Pi(y_1,y_2) = p[a\,Lny_1 + b\,Lny_2] - q_1\,y_1 - q_2\,y_2$$

Sabemos que una condición necesaria de máximo se cumple si las derivadas parciales de esa función de los factores y_1 e y_2 se igualan a cero

$$d\Pi(y_1,y_2)/y_1 = p\,a/y_1 - q_1 = 0$$

$$d\Pi(y_1,y_2)/y_2 = p\,a/y_2 - q_2 = 0$$

De esas expresiones se deducen las demandas de factores:

$$y_1 = ap / q_1$$

$$y_2 = bp / q_2$$

y la oferta de producto, con solo sustituir en la función de producción las expresiones anteriores

$$X = \ln \{ (ap/q_1)^a\ (bp/q_2)^b \}$$

O sea

$$X = a\ln(ap/q_1) + b\ln(bp/q_2)$$

b) Para la función de beneficios basta con sustituir en la expresión que hemos visto en el punto a) las funciones de demanda de los factores

$$\Pi = p\{ a \ln(ap/q_1) + b \ln(bp/q_2) - (a+b)\}$$

c) Hallar las demandas condicionadas de factores requiere resolver otro problema de optimización condicionada, si bien, como sabemos por el teorema de la dualidad, todos los problemas que estamos tratando aquí son cara y cruz de la misma moneda. El problema consiste en minimizar el gasto sujeto a la restricción tecnológica que supone la función de producción, es decir,

$$\text{Min } q_1y_1 + q_2y_2$$
$$\text{Sujeto a: } x = a\ln y_1 + b\ln y_2$$

Siendo el lagrangiano

$$\ell(q, \lambda) = q_1y_1 + q_2y_2 - \lambda(a\ln y_1 + b\ln y_2 - x)$$

Sabemos que las derivadas parciales son condiciones necesarias para el mínimo, por lo que

$$dL(y, \lambda)/dq_1 = q_1 - a\lambda/y_1 = 0$$
$$dL(y, \lambda)/dq_2 = q_2 - a\lambda/y_2 = 0$$

derivándose fácilmente

$$y_2 = (b/a)(q_1/q_2)y_1$$

esa expresión se sustituye en la restricción, es decir, en la función de producción, y de ahí obtenemos

$$y_1 = \{ e^x [(q_2/q_1)(a/b)]^b \}^{1/a+b}$$

procediendo de la misma forma con y_2 obtenemos

$$y_2 = \{ e^x [(q_1/q_2)(b/a)]^a \}^{1/a+b}$$

Ambas son las demandas condicionadas de los factores.

La función de costes se deduce a partir de las demandas condicionadas, sustituyendo en la función de producción

$$C = q_1\{ e^x [(q_2/q_1)(a/b)]^b\}^{1/a+b} + q_2\{ e^x [(q_1/q_2)(b/a)]^a \}^{1/a+b}$$

13.- Un empresario utiliza un input para producir dos outputs de acuerdo con la función de producción $y = A(x_1^a + x_2^b)$ donde $a, b>1$. Se pide:

a)Obtener las funciones de oferta de los productos.

b) Mostrar que la relación de transformación es estrictamente convexa para $x_1,x_2>0$.

Solución:

a) $\text{Max.}\Pi\ (p,q) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - q\, y$

$\partial\Pi\ (p,q) / \partial x_1 = 0 \ \Rightarrow x_1 = (p_1/aAq)^{1/a-1}$

$\partial\Pi$ (p,q) /∂ x_2 = 0 $\Rightarrow x_1 = (p_2/aAq)^{1/b-1}$

b) $d^2x_2/dx_1^2 = -(1/b)a(a-1)x_1^{a-2}[(y/A) - x_1^a]^{1/b-1}+(a^2/b)\ x_1^{2(a-1)}\ [(1/b) - 1]\ [(y/A) - x_1^a]^{1/b-2} < 0$

14.- Si la tecnología de una empresa viene representada por la función de producción:

$$X = (K^{1/2} + L^{1/2})^2$$

a) Obtenga las demandas condicionadas de factores y la función de costes a largo plazo.
b) ¿Cómo variarán las participaciones de los factores cuando se alteran sus precios? ¿Por qué?

Solución:

a)
Resolviendo el problema:

$$\text{Min. } C = q_1\, L + q_2\, K$$
$$\text{s.a: } X = (K^{1/2} + L^{1/2})^2$$

derivando el lagrangiano

$$\ell\ (L,K,\lambda) = q_1\, L + q_2\, K + \lambda\, (K^{1/2} + L^{1/2})^2 - X)$$

De donde se obtienen las condiciones de primer orden de mínimo:

$\partial\ell$ (L,K,λ)/∂L = $q_1 + \lambda\ [2(K^{1/2}+L^{1/2})(1/2\ L^{-1/2})] = q_1 + \lambda\ (L^{-1/2}\ K^{1/2}+1) = 0$

$\partial\ell$ (L,K,λ)/∂L = $q_2 + \lambda\ [2\ (K^{1/2} + L^{1/2})\ (1/2\ K^{-1/2})] = q_2 + \lambda\ (k^{-1/2}L^{1/2}+1) = 0$

$\partial\ell$ (L,K,λ)/$\partial\lambda$ = $(K^{1/2} + L^{1/2})^2 - X = 0$

despejando en las dos primeras expresiones λ e igualando, o bien dividiéndolas, obtenemos

$$q_1/q_2 = (K^{1/2}/L^{1/2}+ 1)/(L^{1/2}/K^{1/2} +1)$$
$$= [(K^{1/2} + L^{1/2})/L^{1/2}] / [(L^{1/2} + K^{1/2})/K^{1/2}]$$
$$= K^{1/2}/L^{1/2}$$

elevando ambos miembros al cuadrado

$$q_1^2/q_2^2 = K/L$$

despejando K:

$$K = q_1^2\ L / q_2^2$$

que sustituido en la tercera condición de primer orden

$$[(q_1^2\ L/q_2^2)^{1/2} + L^{1/2}]^2 = [L^{1/2}\ (q_1/q_2) + L^{1/2}]^2$$
$$= L\ [(q_1/q_2)+1]^2 = L\ [(q_1+q_2)/q_2]^2$$
$$= L\ (q_1 + q_2)^2 / q_2^2 = X$$

de donde despejando L se obtiene la demanda condicionada de L:

$$L = q_2^2 X / (q_1 + q_2)^2$$

Para obtener la demanda condicionada de K se despeja L de la expresión $q_1^2/q_2^2 = K/L$ antes obtenida. Se sustituye en la tercera condición de primer orden derivada del lagrangiano, y se despeja K, para obtener finalmente

$$K = q_1^2 X / (q_1 + q_2)^2$$

Así pues, las demandas condicionadas de factores son

$$L = q_2^2 X / (q_1 + q_2)^2$$
$$K = q_1^2 X / (q_1 + q_2)^2$$

La función de costes a largo plazo se obtiene sustituyendo las demandas condicionadas en la función de costes:

$$C(q_1,q_2,Y) = q_1 L + q_2 K$$
$$= q_1 (q_2^2 X / (q_1 + q_2)^2) + q_2 (q_1^2 X / (q_1 + q_2)^2)$$
$$= (q_1 q_2 X /(q_1 + q_2)^2) (q_2 + q_1)$$
$$= (q_1 q_2 / (q_1 + q_2)) X$$

Por lo que la función de costes a largo plazo será finalmente:

$$C(q_1,q_2, X) = \{q_1 q_2 / (q_1 + q_2)\}X$$

b) La función de producción pertenece a la familia de las CES cuya elasticidad de sustitución (σ) es constante, siendo su valor:

$$\sigma = \partial \log(K/L) / \partial \log(\text{RMS de K por L}) = 2$$

por tanto, al aumentar el precio de un factor, aumenta la participación relativa del otro; si aumenta q_1, la reducción de la demanda condicionada de L respecto a K (L/K) es proporcionalmente mayor que el aumento inicial en (q_1/q_2) lo que implica que se reducirá la participación relativa de L y aumentará la de K.

15.- Halle la combinación de inputs (K, L) que minimizan el coste de producir 434 unidades de output, teniendo en cuenta que la función de producción $X(K,L) = 10\ K^{0,7}\ L^{0,1}$ y los precios de los inputs son $q_K = 28$ y $q_L = 10$ (redondee los decimales a la unidad).

Solución:

Resolvemos el siguiente problema de optimización condicionada:

$$\text{Min } C(K,L) = 28\ K + 10\ L$$
$$\text{s.a. } X(K,L) = 10\ K^{0,7}\ L^{0,1} = 434$$

para ello construimos el lagrangiano:

$$\ell(K,L,\lambda) = 28\ K + 10\ L + \lambda\ (10\ K^{0,7}\ L^{0,1} - 434)$$

Las condiciones necesarias para que una determinada combinación de factores (K,L) minimice C(K,L) son 3:

$$\partial\ell/\partial K = 28 + 7\lambda\,(K^{-0,3}\,L^{0,1}) = 0$$

de donde

$$\lambda = -\,4\,K^{0,3}\,L^{-0,1}$$

$$\partial\ell/\partial L = 10 + \lambda\,(K^{0,7}\,L^{-0,9}) = 0$$

de donde

$$\lambda = -\,10\,K^{-0,7}\,L^{0,9}$$

$$\partial\ell/\partial\lambda = 10\,K^{0,7}\,L^{0,1} - 434 = 0$$

Si igualamos las dos primeras condiciones y despejamos K en función de L:

$$-\,4\,K^{0,3}\,L^{-0,1} = -\,10\,K^{-0,7}\,L^{0,9}$$

$$K = 2,5\,L$$

Sustituyendo en la tercera condición de primer orden

$$10\,(2,5\,L)^{0,7}\,L^{0,1} = 434$$

$$L = 49,94 = 50 \text{ (redondeando a la unidad)}$$

sustituyendo ahora en la relación $K = 2,5\,L$

$$K = 2,5\,(50) = 125$$

sustituyendo los valores de K y L en una de las condiciones de primer orden

$$\lambda = -11{,}5$$

Hagamos esta vez una comprobación adicional. Las condiciones *suficientes* para que en (125, 50) se dé un mínimo es que la *Hessiana* orlada sea definida positiva.

$$|H| = \begin{vmatrix} \partial^2\ell/\partial K^2 & \partial^2\ell/\partial K\partial L & \partial^2\ell/\partial K\lambda \\ \partial^2\ell/\partial L\partial K & \partial^2\ell/\partial L^2 & \partial^2\ell/\partial L\partial\lambda \\ \partial^2\ell/\partial\lambda\partial K & \partial^2\ell/\partial\lambda\partial x_2 & \partial^2\ell/\partial\lambda^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & f_1 \\ C_{21} & C_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix}$$

sustituyendo las derivadas que componen la Hessiana orlada por sus expresiones correspondientes y sustituyendo (K,L, λ) por (125, 50, -11,5), se comprueba que |H| es < 0, esto es, la Hessiana orlada es definida positiva, por lo que las condiciones suficientes para que la función de costes alcance un mínimo con la combinación de factores (125, 50) se cumplen.

La respuesta correcta es pues K=125 y L=50.

IV. PREPARACIÓN DE LA ASIGNATURA

Dado el grado de formalización que exige el tratamiento de una asignatura de *Microeconomía avanzada* como es esta, es necesario insistir, una vez más, en la necesidad de abordar su estudio en primera instancia intentando obtener una visión intuitiva de los temas a tratar, tanto desde el punto de vista conceptual como gráfico. Para ello, se recomienda de nuevo que el alumno haga un repaso de la Microeconomía I estudiada en el primer ciclo pues, como ya se ha señalado en la Introducción, muchos de los temas tratados en esta asignatura coinciden conceptualmente con los incluidos en Microeconomía III. Es importante que a lo largo del estudio el alumno no pierda de vista esta coincidencia.

Por otra parte, pese a que algunos temas requieren cierta memorización por parte del alumno, ***no es nada recomendable el estudio memorístico*** de la asignatura sino que, más bien al contrario, se aconseja que el alumno trate de razonar detenidamente cada tema y entienda la secuencia lógica de los mismos antes de entrar en demostraciones que, a priori, pueden resultar excesivamente farragosas.

El alumno debería empezar el estudio con una lectura general de cada uno de los temas del programa, tratando de entender los objetivos de los mismos y dilucidar los aspectos más relevantes en cada caso. Precisamente con el fin de orientarle en esta tarea, se han incluido las *Cuestiones y Ejercicios* al final de cada sección. Puesto que estos últimos son similares a los que se requerirán en las pruebas presenciales, es altamente recomendable que el alumno se apoye en ellos para repasar cada tema y preparar correctamente la asignatura.

En definitiva, y tal como se deduce de las cuestiones teóricas propuestas, no se trata de que el alumno memorice demostraciones de teoremas complejos, sino más bien, que incida en propiedades relevantes de las funciones, consecuencias de su incumplimiento, axiomas relativos a las funciones objetivo y su significado, etc. De hecho, y pese a que algunas de las cuestiones planteadas se corresponden exactamente con epígrafes concretos del texto obligatorio, otras muchas exigen una aplicación y/o deducción lógica por parte del alumno que revele que verdaderamente ha asimilado los conceptos claves de la asignatura. Para ello, es preciso insistir de nuevo en la importancia que tiene la realización de las Cuestiones y Ejercicios incluidos en esta guía por parte del alumno.

V. TIPO DE EXAMEN Y CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Los exámenes de la asignatura se realizarán únicamente en las convocatorias de *Febrero y Septiembre*. La duración de los exámenes será de *2 horas*, y constarán de ***veinte preguntas tipo test*** de entre las cuales algunas serán de teoría, similares a las que se recogen en la parte de Cuestiones de esta *Guía Didáctica*, y otras requerirán resolver problemas del mismo tipo que los que están recogidos también en esta *Guía Didáctica,* que se encuentra también a disposición de los alumnos en la página web de la asignatura (a partir del curso 2004-2005 las condiciones de los exámenes cambiarán, pues se examinará con 10 preguntas tipo test y un problema que deberá desarrollarse en hoja aparte, con hora y media de tiempo para contestar).

Las preguntas se calificarán de la siguiente forma: 1) cada pregunta respondida correctamente con ***0,5 puntos***; 2) cada respuesta incorrecta con ***-0,15 puntos*** y 3) las preguntas no respondidas se califican con ***0 puntos***. Las preguntas tendrán sólo una respuesta correcta. El alumno ***deberá entregar*** junto con la hoja de lectura óptica, en papel aparte, el desarrollo de los problemas.

El único material que podrá utilizarse en el examen será una calculadora no programable, quedando excluida por tanto la posibilidad de hacer uso del programa de la asignatura o de cualquier otro material.

Para superar el examen, el alumno debe haber obtenido ***como mínimo una calificación 5 puntos***.

VI. SERVICIO DE CONSULTAS

Las consultas relativas a la asignatura se atenderán durante el primer semestre del curso académico los **lunes** desde las 16,00 a las 20,00 horas en:

a) El ***despacho 2.31*** o ***2.28*** de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales (2ª planta).

b) En el teléfono de la asignatura **91 398 78 18** o en el **91 398 78 19**.

c) A través del **fax 91 398 87 68** (dirigido a la atención de los profesores de la asignatura).

d) Mediante correo electrónico en las direcciones mlorenzo@cee.uned.es rosuna@cee.uned.es o lrasines@cee.uned.es

Recomendamos especialmente usar los correos electrónicos arriba indicados para consultas sobre la materia.

VII. COMUNICACIÓN DE LAS CALIFICACIONES

Las calificaciones le serán comunicadas al alumno mediante envío de una papeleta a su domicilio. Adicionalmente, las notas estarán disponibles en el S.I.R.A, donde el alumno puede consultarlas especificando su D.N.I. (teléfono **902 25 26 43**) o bien a través de internet en https://apliweb.uned.es/ciberuned/index.asp

Las soluciones al examen se colocarán en la página web de la asignatura, en

http://www.uned.es/dpto-analisis-economico1/43401/43401.htm

además del envío por correo postal de la correspondiente *papeleta*, *que no tiene valor probatorio alguno*, pues son puramente informativas.